



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA CONJUNTOS

CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1



CONJUNTOS

Concepto : Un **conjunto** es una reunión, agrupación, colección... de entes llamados **elementos del conjunto**

Se dice que un conjunto esta correctamente **determinado** al conocerse los elementos que lo conforman

Ejemplo

$$A = \{ a ; e ; i ; o ; u \}$$

Determinación por extensión

$$A = \{ x / \underbrace{x \text{ es una vocal}} \}$$

Determinación por comprensión

función proposicional

Obs: Solo los elementos que hacen verdadera la función proposicional son elementos de A

RELACIÓN DE PERTENENCIA

Definición : Se dice que x pertenece a A ($x \in A$) si x es elemento de A

Observación : $(x \notin A) \Leftrightarrow \sim(x \in A)$

Ejemplo

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones sobre el conjunto

$$A = \{ 1 ; \{0\}; \{1; 0\} \}$$

I. $\{1; 0\} \in A$ (V) II. $0 \in A$ (F) III. $\{1; \{0\}\} \notin A$ (V) IV. $\{1\} \in A$ (F)

Conjunto Vacío

Es aquel conjunto que “no tiene” elementos

Se denota: $\emptyset$ o $\{ \}$

Formalmente

$x \in \emptyset$ es siempre falsa

Conjunto Universo

Es aquel conjunto que tiene por elementos a todos aquellos presentes en un estudio, fenómeno, análisis,... etc.
Se denota por U

Formalmente

$x \in U$ es siempre verdadera

Conjunto Unitario Es aquel conjunto que tiene un único elemento

Formalmente

El conjunto A es unitario si

$x \in A$ es verdadera solo para un único x

RELACIÓN DE INCLUSIÓN

Concepto : Se dice que el conjunto A esta incluido en el conjunto B ($A \subset B$) si todo elemento de A es también elemento de B

Definición : $A \subset B \iff (x \in A \rightarrow x \in B)$ es siempre verdadero

Observación : $(A \not\subset B) \iff \sim(A \subset B)$

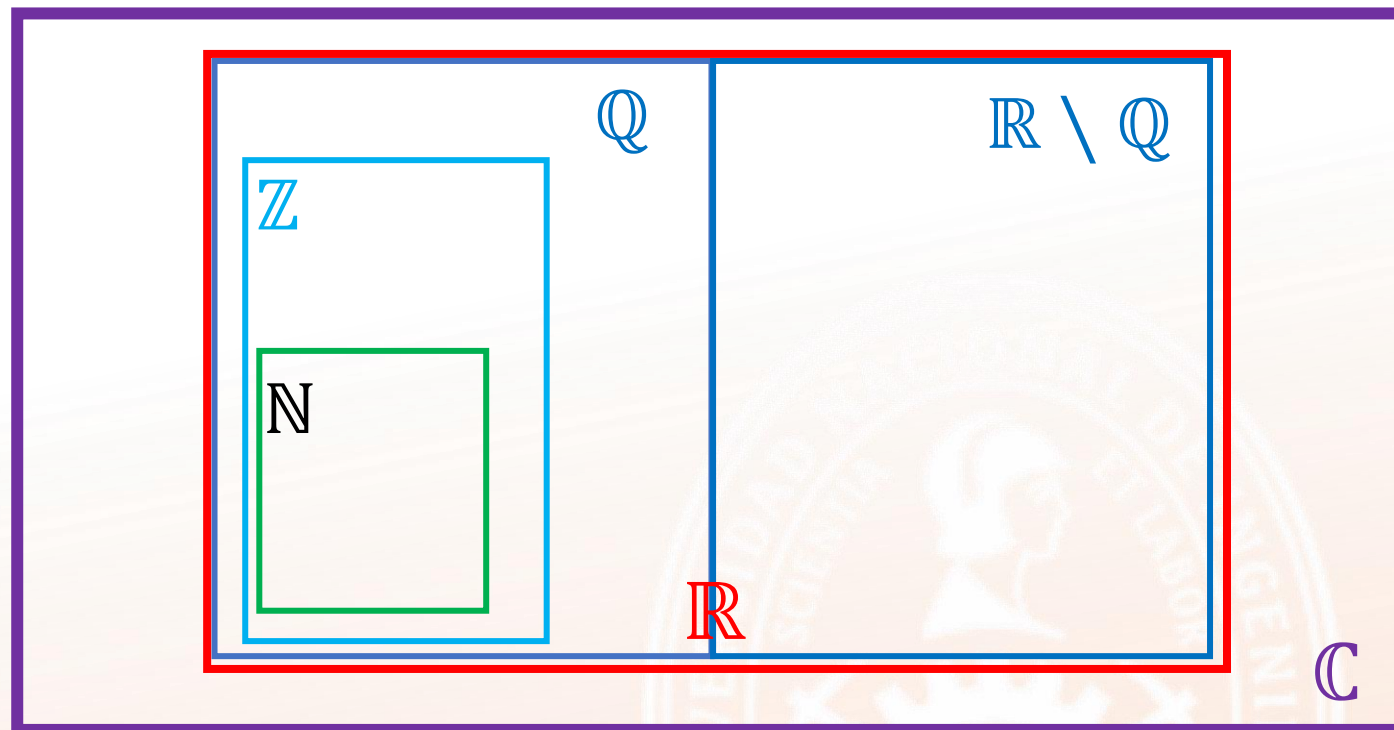
Ejemplo

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones sobre el conjunto

$$A = \{ \mathbf{1} ; \emptyset ; \{\emptyset\}; \{\mathbf{1}; \emptyset\} \}$$

- I. $\emptyset \subset A$ (V) II. $\{\mathbf{1}; \emptyset\} \not\subset A$ (F) III. $\{\mathbf{1}; \{\emptyset\}\} \subset A$ (V) IV. $\{\{\emptyset\}\} \not\subset A$ (F)

INCLUSIÓN EN CONJUNTOS NUMÉRICOS



IMPORTANTE

PARA TODO CONJUNTO A : $\emptyset \subset A$

PARA TODO CONJUNTO A : $A \subset A$

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Concepto: El conjunto A es igual a B ($A = B$) si ambos conjuntos tienen los mismos elementos

Formalmente $A = B \iff (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ es siempre verdadero

Ejemplo

Sean $A = \{ x \in \mathbb{N} / 2 < x \leq 7 \}$ y $B = \{ 3; 4; 5; 6; 7 \}$ se tiene que $A = B$

Teorema: $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$

SUBCONJUNTOS

Definición: Se dice que el conjunto A es subconjunto de B si $A \subset B$

Observación:

Si A es subconjunto de B podría darse el caso de que A sea igual a B

SUBCONJUNTO PROPIO

Definición: Se dice que el conjunto A es subconjunto propio de B si:

$$A \subset B \wedge A \neq B$$

Ejemplo

Para el conjunto $A = \{p; q; r\}$

Subconjuntos: $\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p; q\}, \{p; r\}, \{q; r\}, \{p; q; r\}$

Subconjuntos propios: $\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p; q\}, \{p; r\}, \{q; r\}$

Ejercicio 1

Dado el conjunto: $A = \{0; 1; \{1\}; \emptyset; \{\emptyset\}\}$

Indique cuantas de las siguientes proposiciones son verdaderas

- I. $\emptyset \in A$ II. $\{\{\{\emptyset\}\}\} \subset A$ III. $\{1; \{1\}\} \subset A$ IV. $\{\{\emptyset\}; \{1\}\} \not\subset A \vee \{0\} \in A$

Resolución

I. $\emptyset \in A$ (VERDADERA)

II. $\{\{\emptyset\}\} \not\subset A \rightarrow \{\{\{\emptyset\}\}\} \not\subset A$ (FALSA)

III. $1 \in A \wedge \{1\} \in A \rightarrow \{1; \{1\}\} \subset A$ (VERDADERA)

IV. $\{\emptyset\} \in A \wedge \{1\} \in A \rightarrow \{\{\emptyset\}; \{1\}\} \subset A$ también $\{0\} \notin A$, luego es (FALSA)

Respuesta: 2

Ejercicio 2

Sean los conjuntos

$$A = \{\emptyset ; \{\emptyset\}\} \quad B = \{0; \{\emptyset\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\}$$

Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $\emptyset \in (A \cap B)$

II. $\{\emptyset\} \subset A \wedge \{\emptyset\} \in B$

III. $A \in B \wedge \{A \subset B \vee B \setminus \{A\} = \{0\}\}$

A) VVV

B) VVF

C) VFV

D) FVF

E) FVV

Resolución

I) **(F)** $\emptyset \in (A \cap B) \equiv \emptyset \in A$ (VERDADERO) $\wedge \emptyset \in B$ (FALSO)

II) **(V)** $\{\emptyset\} \subset A$ (VERDADERO) $\wedge \{\emptyset\} \in B$ (VERDADERO)

III) **(F)** $A \in B$ (VERDADERO) $\wedge \{A \subset B$ (FALSO) $\vee B \setminus \{A\} = \{0\}$ (FALSO)}

CLAVE "D"

Ejercicio propuesto 1

Considere los conjuntos:

$$A = \{\emptyset\}, \quad B = \{0; \emptyset\}, \quad C = \{\{\emptyset\}; 0\}$$

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

I. $B = C$

II. $A \subset C$

III. $A \subset B \wedge \{A\} \subset C$

A) VVV

B) FVV

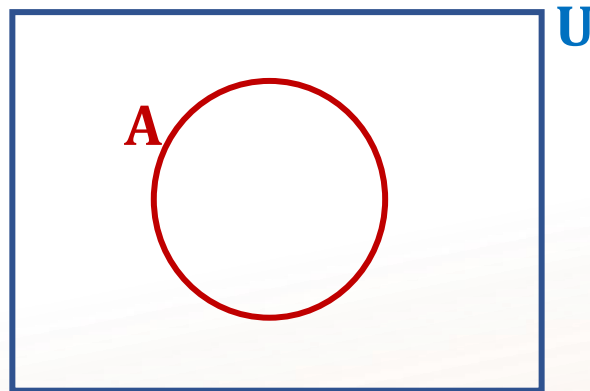
C) FFV

D) FFF

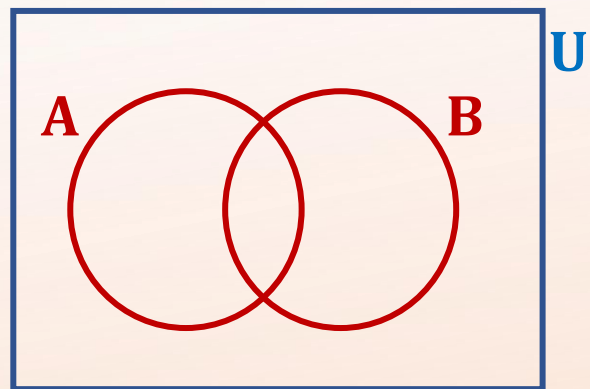
E) VFF

Diagramas de Venn

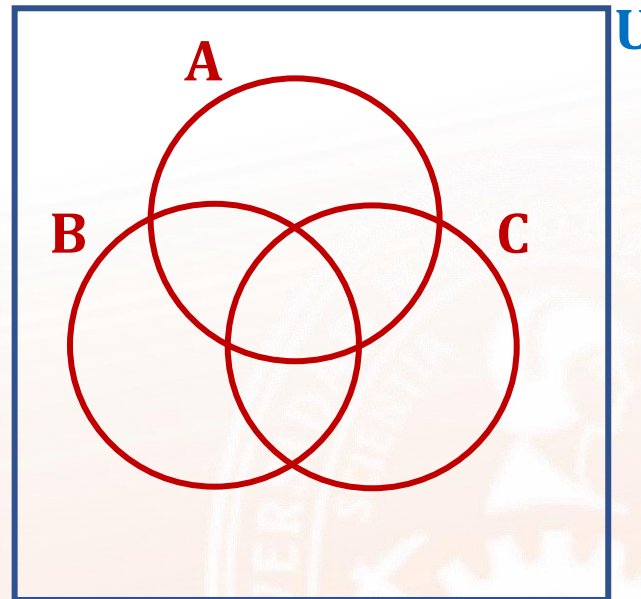
Para un conjunto



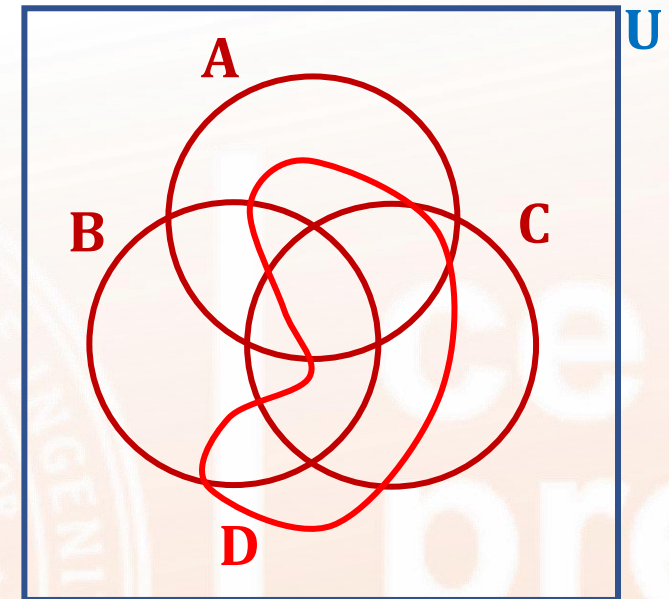
Para dos conjuntos



Para tres conjuntos



Para cuatro conjuntos



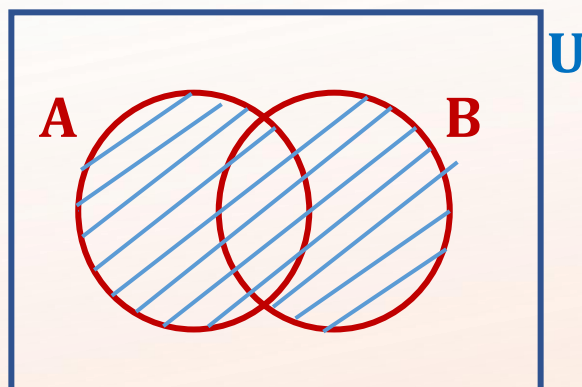
Importante: Estos gráficos resumen todas las posibilidades de compartir o no compartir elementos entre conjuntos luego con ellos pueden hacerse una demostración gráfica de Propiedades

OPERACIONES CON CONJUNTOS

UNIÓN

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

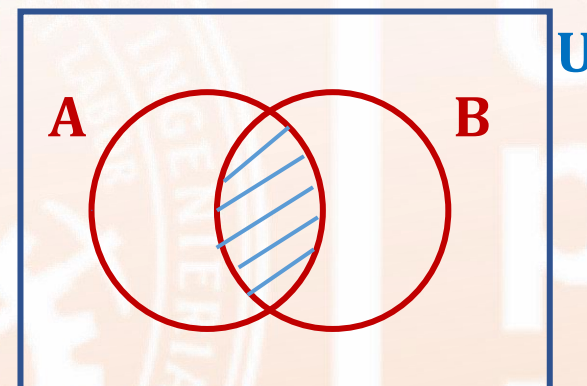


La unión esta formada por los elementos que pertenezcan a uno o al otro conjunto

INTERSECCIÓN

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$



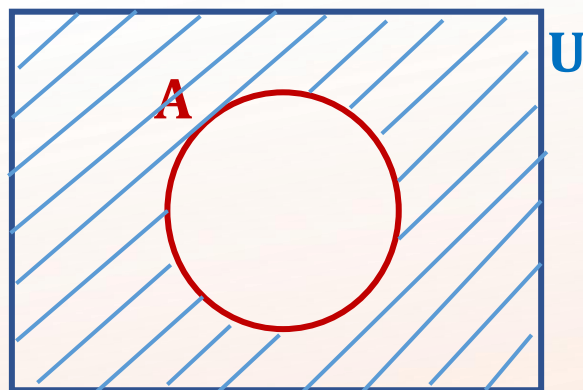
La intersección esta formada por los elementos que pertenezcan a ambos conjuntos a la vez

OPERACIONES CON CONJUNTOS

COMPLEMENTO

$$A^C = \{x \in U / x \notin A\}$$

$$x \in A^C \Leftrightarrow x \notin A$$

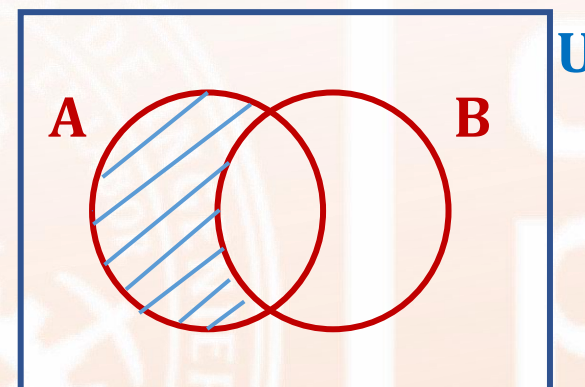


El complemento de un conjunto esta formado por los elementos del Universo que no están en dicho conjunto

DIFERENCIA

$$A \setminus B = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$



Propiedad:

Del gráfico puede concluirse que

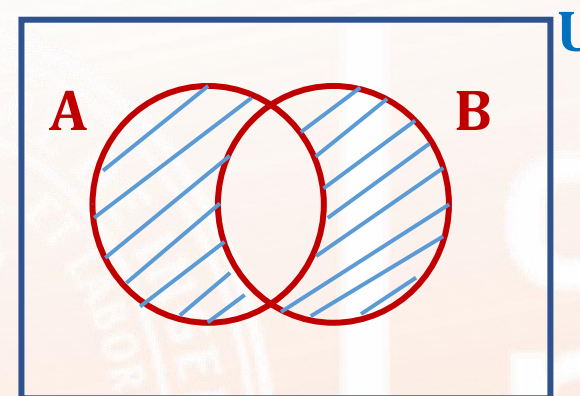
$$A \setminus B = A \cap B^C$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \Delta x \in B$$

DIFERENCIA SIMÉTRICA

$$A \Delta B = \{x \in U / x \in A \Delta x \in B\}$$



Propiedad:

Del gráfico puede concluirse que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

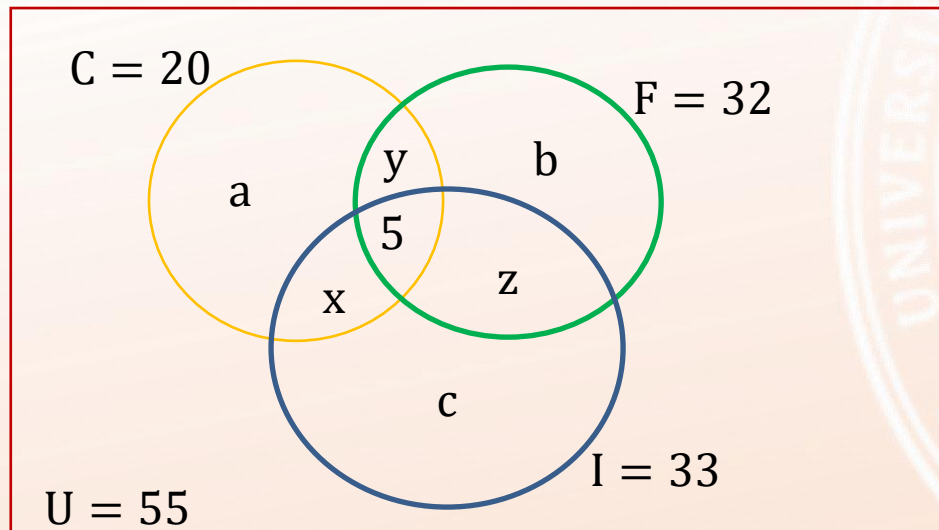
Ejercicio 3

Si de un grupo de 55 personas; 20 hablan castellano; 32 francés, 33 inglés y 5 los 3 idiomas, entonces el número de personas que solo hablan dos de estos tres idiomas es:

- A) 25 B) 24 C) 20 D) 18 E) 16

Resolución:

En el diagrama de Venn



Obtenemos:

$$a + x + y + 5 = 20 \Rightarrow a + x + y = 15 \dots (1)$$

$$b + z + y + 5 = 32 \Rightarrow b + z + y = 27 \dots (2)$$

$$c + x + z + 5 = 33 \Rightarrow c + x + z = 28 \dots (3)$$

$$\text{también: } a + b + c + x + y + z + 5 = 55$$

$$\Rightarrow a + b + c + x + y + z = 50 \dots (4)$$

Sumando (1) + (2) + (3) obtenemos

$$a + b + c + 2(x + y + z) = 70 \dots (5)$$

$$\text{Luego, restando (5) } - (4) \quad x + y + z = 20$$

CLAVE "C"

Ejercicio 2016 - 2

Dado el conjunto

$$A = \left\{ x / x \in \mathbb{R} \Delta x \in \mathbb{N} \right\}$$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

- I. $\mathbb{Q} \subset A$ III. $\frac{22}{7} \in A$
II. $\mathbb{I} \subset A$

($\mathbb{Q}$ es el conjunto de los racionales e $\mathbb{I} \subset A$ es el conjunto de los irracionales)

- A) VVF C) FFV E) VVV
B) FFF D) FVV

Ejercicio 2020 - 1

Sea Δ la diferencia simétrica en teoría de conjuntos. Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- I. $(A \Delta B = D \Delta B) \rightarrow A = D$
II. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
III. $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \Delta C$

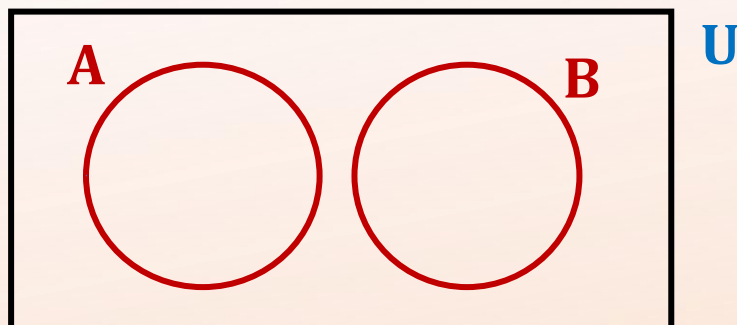
- A) VVV C) VFV E) VFF
B) VVF D) FVV

CONJUNTOS DISJUNTOS Y PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN

DEFINICIÓN A y B son conjuntos disjuntos si no tienen elementos comunes, esto es, A y B son disjuntos si:

$$A \cap B = \emptyset$$

Representación gráfica



Son equivalentes las condiciones

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \setminus B = A$$

$$A \subset B^c$$

$$B \setminus A = B$$

$$B \subset A^c$$

$$A \triangle B = A \cup B$$

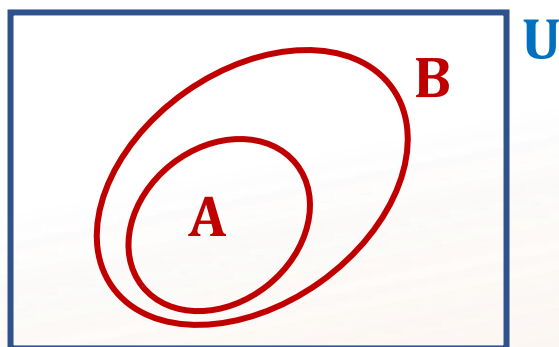
PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN

Corolario

Para cualquier conjunto A se cumple:

TEOREMA

Si $A \subset B$



Se cumple que

$$B^c \subset A^c$$

$$A \cap B = A$$

$$A \cup B = B$$

$$A \setminus B = \emptyset$$

$$\emptyset \cap A = \emptyset$$

$$\emptyset \cup A = A$$

$$\emptyset \setminus A = \emptyset$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \setminus U = \emptyset$$

$$\emptyset \cap U = \emptyset$$

$$\emptyset \cup U = U$$

$$\emptyset \setminus U = \emptyset$$

Ejercicio 4

Sea $U = \mathbb{N}$ y los conjuntos

$$A = \{x \in U / x < 5 \rightarrow x < 3\}$$

$$B = \left\{14 - x \in \mathbb{N} / x \in A \wedge \frac{x}{3} \in \mathbb{Z}\right\}$$

Calcule la suma de elementos del conjunto B

Resolución

$$A = \{x \in U / x \geq 5 \vee x < 3\} \Rightarrow A = \{1; 2; 5; 6; 7; 8; \dots\}$$

$$B = \{14 - x \in \mathbb{N} / x = 6; 9; 12; 15; \dots\}$$

$$B = \{8; 5; 2\}$$

Luego, la suma es: $8 + 5 + 2 = 15$

Ejercicio propuesto 2

Sean A , B y C subconjuntos no vacíos de un universo U . Determine el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes

I. Si $A \cap C = B \cap C$, entonces $A = B$

II. Si $A = B$, entonces $A \cap C = B \cap C$

III. Si $A \subset (A^c \cup B)$, entonces $A \subset (B \cup C)$

A) VVV

B) VFV

C) FFV

D) FFF

E) FVV